Grundlagen für dein Mathematik Abitur - Sicher durch den Pflichtteil

Probeleser

Meike Iwanek

Grundlagen für dein Mathematik Abitur - Sicher durch den Pflichtteil

Probeleser

Meike Iwanek

Dieses Buch wird verkauft, unter http://leanpub.com/binomischeformeln

Diese Version wurde veröffentlicht am 2017-10-03

Dies ist ein Leanpub-Buch. Leanpub bietet Autoren und Verlagen, mit Hilfe von Lean-Publishing, neue Möglichkeiten des Publizierens. Lean Publishing bedeutet die wiederholte Veröffentlichung neuer Beta-Versionen eines eBooks unter der Zuhilfenahme schlanker Werkzeuge. Das Feedback der Erstleser hilft dem Autor bei der Finalisierung und der anschließenden Vermarktung des Buches. Lean Publishing unterstützt den Autor darin ein Buch zu schreiben, das auch gelesen wird.

© 2016 - 2017 Meike Iwanek

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es freut mich sehr, dass du dich mit mir auf dein Mathematikabitur vorbereiten möchtest.
Ich zeige dir alle Themen, die du für den Pflichtteil benötigst und generell auch die Grundlagen für dein Matheabi.
So kannst du ganz relaxt dein Abi schreiben.

Unser Weg zum Abi führt uns zuerst durch die Ableitungen, dann über die Stammfunktionen zu den Gleichungen und danach zum großen Kapitel der Kurvendiskussion und allem, was dazu gehört. Auch habe ich ein Kapitel den "Aussagen zu Schaubildern" gewidmet, da hiermit meiner Erfahrung nach die meisten Schüler Probleme haben. Wenn du das geschafft hast, verlassen wir die Analysis und gehen weiter auf dem Weg der analytischen Geometrie. Kurz vor dem Gipfel gehen wir dann noch ein Stück Weg mit der Wahrscheinlichkeit und dann bist du angekommen und kannst dein Matheabi mit Bravour bestehen.

Du kannst das Buch Kapitel für Kapitel durcharbeiten oder in den Themen springen und erst das bearbeiten, was dir z.B. leicht fällt oder das, was du zur Zeit im Unterricht behandelst.

Übungsaufgaben

Hier findest du die Übungsaufgaben.

Tipps&Tricks

Hier findest du nützliche Tipps und Hinweise.

Vorgehensweise

Hier findest du die Vorgehensweise.

Solltest du Fehler in den Erklärungen, Aufgaben oder Lösungen finden, freue ich mich sehr, wenn du mir unter nachhilfe@mathsparks.de schreibst. Ich habe sehr darauf geachtet, dass alles stimmt, aber der Fehlerteufel kann jederzeit zuschlagen. Auch wenn meine Erklärungen dir nicht ausreichen oder du andere Fragen zu Mathe hast, freue ich mich, wenn du mir schreibst: nachhilfe@mathsparks.de

Ich habe lange recherchiert und überlegt, mit welchem Tool ich mein Buch schreiben soll. Meine PDFs erstelle ich mit LaTex, aber für Amazon benötige ich ein ePub-Format und das kann LaTex nicht. Daher fiel meine Wahl schließlich auf Leanpub. Einiges ist hier allerdings reglementiert und ich kann manches vom Design her nicht so umsetzen, wie ich es gerne wollte (z.B. Zeilenabstände oder Umlaute), aber es ist auf jeden Fall eine gute Lösung für mathematische Abhandlungen, und ich hoffe, dass du über manche Formatierung, die dir nicht so passt, drüber hinwegschauen kannst.

Copyright

Ich habe die Abitursaufgaben der letzten Jahrgänge verwendet und mir darüber hinaus eigene Aufgaben ausgedacht. Sollten Sie wider Erwarten doch annehmen müssen, dass ich, ohne es zu wollen, Ihre Aufgabe verwendet habe oder anderweitig gegen ein Copyright verstoße, dann melden Sie sich bitte, damit wir dies umgehend aus der Welt schaffen können: nachhilfe@mathsparks.de. Vielen Dank dafür.

Danksagung

Mein erster Dank geht an meine Schwägerin Stefanie Iwanek, die mir so ein tolles Buchcover designt hat - ich danke dir! Außerdem an meine Schwester Maren Schulz, die sich immer wieder meine Statusberichte angehört hat, “mathematische Tipps” zur Gestaltung hatte sowie mir die tolle Sinusuhr erstellt hat, ebenso wie auch der Rest meiner Familie. Zudem danke ich Elke Kranz (auch Mathenachhilfelehrerin) und Michael Schulz (Schwager), die unermüdlich die großen „mathematischen“ Teile des Buches durchgelesen und korrigiert haben, sowie Michael Bergmann (von Textnotdienst.de), der die Buchtexte lektoriert und korrigiert hat, dabei den mir wichtigen, ganz eigenen und verständlichen Schreibstil aber unverändert gelassen hat. Last but not least vielen Dank all den Probelesern, die das Buch in verschiedenen Stadien des Entstehungsprozesses testweise gelesen und angewendet haben.

Ableitungen

Die Ableitungen sind wichtige Grundlagen für den Bereich der Analysis. Du kannst sie mit den Vokabeln einer Sprache vergleichen. Wenn du diese nicht beherrschst, kannst du dich nicht ausdrücken. Genau so ist es auch mit den Ableitungen. Wenn du eine Funktion nicht ableiten kannst, kannst du sie auch nicht diskutieren.

Grundlagen

Die erste Ableitung $f'(x)$ ist die Steigung der Funktion $f(x)$ und wird auch mit m bezeichnet. Auch wird in den Büchern/Aufgaben von der momentanen Änderungsrate oder der Steigung der Tangente gesprochen. Damit kannst du ausrechnen, wie die Steigung generell oder an einem bestimmten Punkt einer Funktion ist. Zudem kannst du die Extrempunkte bestimmen.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist das Krümmungsverhalten einer Funktion $f(x)$. Damit kannst du ausrechnen, ob eine Funktion rechts- oder linksgekrümmt ist. Zudem kannst du die Wendepunkte bestimmen.

Da wir drei verschiedene Funktionsklassen haben, musst du dir auch meistens drei "Regeln" merken.

- Ganzrationale Funktionen - Merkmal: x in der Basis, z.B. x^5
- Exponentialfunktionen - Merkmal: e als Basis und/oder x als Hochzahl, z.B. e^{2x} oder 2^x
- Trigonometrische Funktionen - Merkmal: enthält sinus oder cosinus, z.B. $sin(5x)$

Potenzregel

Ganzrationale Funktion

Diese wendest du an, wenn du ein x in der Basis und eine Hochzahl hast.

- Hochzahl nach vorne holen
- Basis abschreiben
- Hochzahl eins weniger

Allgemein ganzrationale Funktion

$$f(x) = x^p$$

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

Beispiel ganzrationale Funktion

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5 \cdot x^4$$

- die 5 nach vorne holen/schreiben
- x abschreiben
- Hochzahl eins weniger $5 - 1 = 4$

Exponentialfunktion

Die Ausnahme bildet die Exponentialfunktion (e als Basis und/oder x als Hochzahl). Du kannst diese auch als Kettenregel "auffassen", aber ich finde es so irgendwie einfacher zu merken.
* Hochzahl ableiten
* Ableitung nach vorne holen
* e abschreiben
* Hochzahl abschreiben - bleibt gleich

Allgemein Exponentialfunktion

$$f(x) = e^{ax}$$

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

Beispiel Exponentialfunktion

$$f(x) = e^{3x}$$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$$

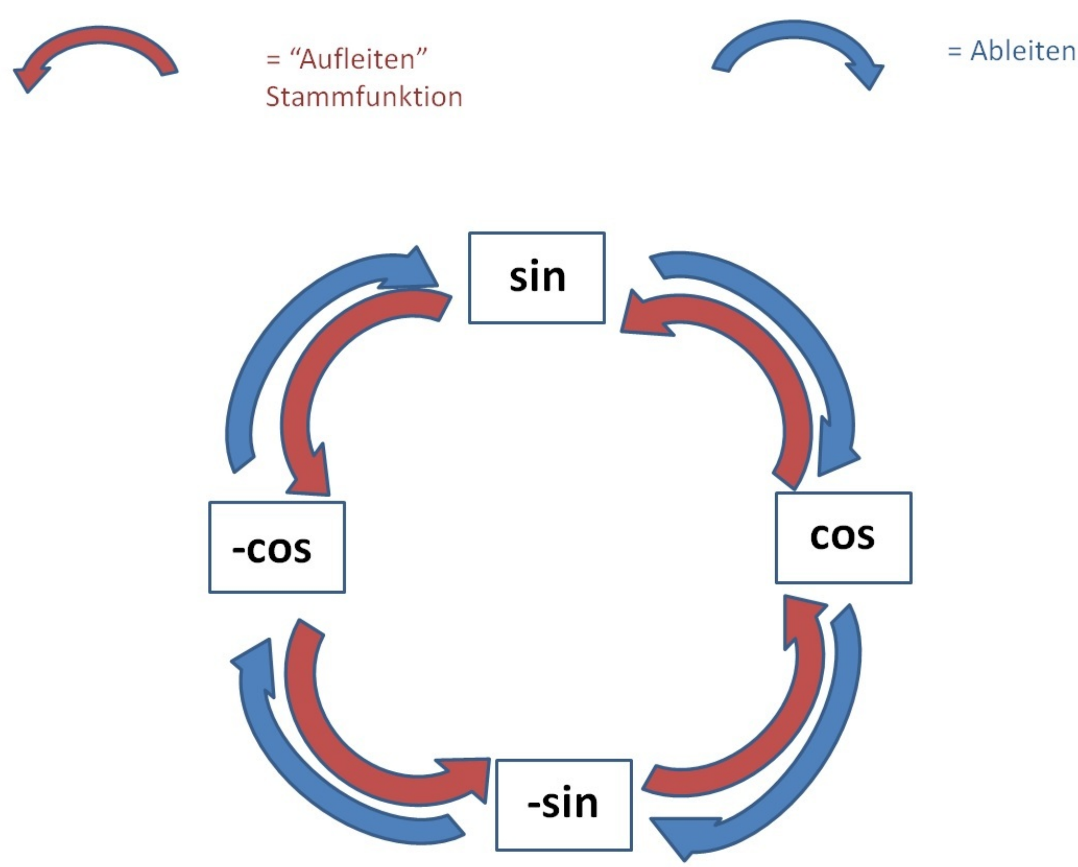
- Die Ableitung der Hochzahl nach vorne holen/schreiben - hier 3
- e abschreiben
- Hochzahl bleibt erhalten

Trigonometrische Funktion

Merkmal dieser Funktion sind der Sinus (sin) oder der Cosinus (cos), z.B. $cos(7x)$

Allgemein Trigonometrische Funktion

- $sin(x)$ wird abgeleitet zu $cos(x)$
- $cos(x)$ wird abgeleitet zu $-sin(x)$
- $-sin(x)$ wird abgeleitet zu $-cos(x)$
- $-cos(x)$ wird abgeleitet zu $sin(x)$



Sinusuhr

Beispiel trigonometrische Funktion

$$f(x) = sin(x)$$

$$f'(x) = cos(x)$$

Übungen

Bilde die erste Ableitung:

1. $$f(x) = x^{10}$$
2. $$f(x) = cos(x)$$
3. $$f(x) = e^{5x}$$
4. $$f(x) = x^{-3}$$
5. $$f(x) = \frac{1}{x^5}$$
6. $$f(x) = \sqrt{x}$$
7. $$f(x) = 10$$

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

Lösungen:

1.
$$f(x) = x^{10}$$

$$f'(x) = 10 \cdot x^9$$

2.
$$f(x) = cos(x)$$

$$f'(x) = -sin(x)$$

3.
$$f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$$

4.
$$f(x) = x^{-3}$$

$$f'(x) = -3 \cdot x^{-4}$$

5.
$$f(x) = \frac{1}{x^5}$$

umschreiben zu

$$f(x) = x^{-5}$$

$$f'(x) = -5 \cdot x^{-6}$$

und wieder in einen Bruch zurückschreiben

$$f'(x) = \frac{-5}{x^6}$$

6.
$$f(x) = \sqrt{x}$$

umschreiben zu

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}}$$

und wieder als Wurzel zurück schreiben

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

7.

$$f(x) = 10$$

$$f'(x) = 0$$

Tipps&Tricks

- Zahlen/Konstanten werden immer zu einer Null abgeleitet.
- Brüche mit x im Nenner werden immer zu einem x als Basis mit der gleichen negativen Hochzahl umgeschrieben bevor sie abgeleitet werden.
- Ich empfehle dir die Ableitung zu $f(x) = \sqrt{x}$ auswendig zu lernen, da sie sehr oft vorkommt.

Faktorregel

Diese wendest du an, wenn du vor der Basis noch einen Faktor oder eine Konstante und

- eine Hochzahl
- e in der Basis und x in der Basis oder der Hochzahl
- sinus oder cosinus in der Basis hast

Allgemein ganzrationale Funktion

$$f(x) = c \cdot x^p$$

$$f'(x) = c \cdot p \cdot x^{p-1}$$

- Hochzahl nach vorne holen
- mit der Konstanten, wenn möglich verrechnen
- Basis abschreiben
- Hochzahl eins weniger

Beispiel ganzrationale Funktion

$$f(x) = 3 \cdot x^6$$

$$f'(x) = 3 \cdot 6 \cdot x^5 = 18 \cdot x^5$$

- die 3 nach vorne holen/schreiben
- mit der 6 verrechnen ergibt 18
- x abschreiben
- Hochzahl eins weniger $6 - 1 = 5$

Allgemein Exponentialfunktion

$$f(x) = c \cdot e^{ax}$$

$$f'(x) = c \cdot a \cdot e^{ax}$$

- Hochzahl ableiten
- Ableitung nach vorne holen
- mit der Konstanten, wenn möglich, verrechnen
- e abschreiben
- Hochzahl abschreiben - bleibt gleich

Beispiel Exponentialfunktion

$$f(x) = 8 \cdot e^{2x}$$

$$f'(x) = 8 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 16 \cdot e^{2x}$$

- Die Ableitung der Hochzahl nach vorne holen/schreiben - hier 2
- mit der 8 verrechnen ergibt 16
- e abschreiben
- Hochzahl bleibt erhalten

Allgemein trigonometrische Funktion

- Die Konstante bleibt stehen/bleibt erhalten
- $sin(x)$ wird abgeleitet zu $cos(x)$
- $cos(x)$ wird abgeleitet zu $-sin(x)$
- $-sin(x)$ wird abgeleitet zu $-cos(x)$
- $-cos(x)$ wird abgeleitet zu $sin(x)$

Beispiel trigonometrische Funktion

$$f(x) = 4 \cdot cos(x)$$

$$f'(x) = 4 \cdot (-sin(x)) = -4sin(x)$$

- die 4 bleibt stehen
- $cos(x)$ wird zu $-sin(x)$
- du kannst das Minus aus “kosmetischen Gründen” vor die 4 ziehen

Übungen

Bilde die erste Ableitung:

1. $$f(x) = -3x^{11}$$
2. $$f(x) = -5sin(x)$$
3. $$f(x) = -8x^{-3}$$
4. $$f(x) = 10e^{5x}$$
5. $$f(x) = \frac{5x^2}{a}$$

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

Lösungen:

1. $$f(x) = -3x^{11}$$

$$f'(x) = -33 \cdot x^{10}$$

2. $$f(x) = -5sin(x)$$

$$f'(x) = -5cos(x)$$

3. $$f(x) = -8x^{-3}$$

$$f'(x) = -8 \cdot -3x^{-4} = 24x^{-4}$$

4. $$f(x) = 10e^{5x}$$

$$f'(x) = 50e^{5x}$$

5. $$f(x) = \frac{5x^2}{a}$$

$$f'(x) = \frac{10x}{a}$$

   Beachte a ist eine Konstante und bleibt erhalten!

Summenregel

Diese wendest du an, wenn du zwischen den einzelnen Teilfunktionen ("Elementen") ein Plus oder Minus stehen hast. Du leitest dann jede Teilfunktion ("Element") einzeln nach der Potenz- und Faktorregel ab.

Allgemein

$$f(x) = x^p + x^q - x^s$$

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1} + q \cdot x^{q-1} - s \cdot x^{s-1}$$

$$h(x) = f(x) + g(x) - i(x)$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) - i'(x)$$

Beispiel

$$f(x) = 4x^5 + 3cos(x) - 3e^{2x}$$

$$f'(x) = 20x^4 - 3sin(x) - 6e^{2x}$$

- du leitest die einzelnen Elemente der Reihe nach ab und hängst sie wieder aneinander
- $4x^5$ wird abgeleitet nach der Faktorregel zu $20x^4$
- $3cos(x)$ wird abgeleitet nach der Faktorregel zu $-3sin(x)$
- $-3e^{2x}$ wird abgeleitet nach der Faktorregel zu $-6e^{2x}$

Übungen

Bilde die erste Ableitung:

1. $$f(x) = 5x^4 - 3x^{-3}$$
2. $$f(x) = 8x + 3 - sin(x)$$
3. $$f(x) = x + \sqrt{x} + e^x$$
4. $$f(x) = bx^2 + a$$
5. $$f(x) = ln(x) - cos(x) + 3e^{10x}$$

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

Lösungen:

1.
$$f(x) = 5x^4 - 3x^{-3}$$

$$f'(x) = 20x^3 + 9x^{-4}$$

2.
$$f(x) = 8x + 3 - sin(x)$$

$$f'(x) = 8 - cos(x)$$

3.
$$f(x) = x + \sqrt{x} + e^x$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$$

4.
$$f(x) = bx^2 + a$$

$$f'(x) = 2bx$$

5.
$$f(x) = ln(x) - cos(x) + 3e^{10x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + sin(x) + 30e^{10x}$$

Tipps&Tricks

- x wird zu einer “1” abgeleitet - es fällt NICHT weg
- Konstanten mit MAL bleiben erhalten; Konstanten mit PLUS oder MINUS fallen weg
- Sonderfall $ln(x)$ wird zu $\frac{1}{x}$ abgeleitet - würde ich auswendig lernen

Produktregel

Diese wendest du an, wenn zwischen zwei Teilfunktionen, die x enthalten (zwischen 2 “Elementen”), ein Malzeichen steht - zum Beispiel bei $x \cdot e^x$. Manchmal steht das Malzeichen nicht da und du musst es dir denken.
Allgemein gesagt musst du sie immer anwenden, wenn Teilfunktionen (“Elemente”) verschiedener Funktionsklassen nebeneinander stehen (ohne plus und minus).

Allgemein

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- erstes Element ableiten und zweites stehen lassen
- plus schreiben
- erstes Element stehen lassen und zweites ableiten
- ableiten nach der Potenz- und Faktorregel

Beispiel

$$f(x) = (4x - 2) \cdot sin(x)$$

$$f'(x) = 4 \cdot sin(x) + (4x - 2) \cdot cos(x)$$

- $4x - 2$ zu 4 ableiten MAL sin(x) (stehen lassen)
- plus
- $(4x - 2)$ (stehen lassen) MAL $sin(x)$ zu $cos(x)$ ableiten

Übungen

Bilde die erste Ableitung:

1. $$f(x) = 6sin(x) \cdot 5e^{6x}$$
2. $$f(x) = \frac{1}{x} \cdot cos(x)$$
3. $$f(x) = e^{4x} \cdot 5x^3$$
4. $$f(x) = ln(x) \cdot \frac{1}{x}$$
5. $$f(x) = 3cos(x) \cdot 4sin(x)$$

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

Lösungen:

1. $$f(x) = 6sin(x) \cdot 5e^{6x}$$

$$f'(x) = 6cos(x) \cdot 5e^{6x} + 6sin(x) \cdot 30e^{6x}$$

2. $$f(x) = \frac{1}{x} \cdot cos(x) = x^{-1} \cdot cos(x)$$

$$f'(x) = -1x^{-2} \cdot cos(x) + x^{-1} \cdot (-sin(x)) = \frac{-1}{x^2} \cdot cos(x) - \frac{1}{x} \cdot sin(x)$$

   Umschreiben nicht vergessen und das Minus vor dem Sinus kann man vorziehen.

3. $$f(x) = e^{4x} \cdot 5x^3$$

$$f'(x) = 4e^{4x} \cdot 5x^3 + e^{4x} \cdot 15x^2$$

4. $$f(x) = ln(x) \cdot \frac{1}{x} = ln(x) \cdot x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + ln(x) \cdot -1x^{-2} = \frac{1}{x^2} + ln(x) \cdot \frac{-1}{x^2}$$

5. $$f(x) = 3cos(x) \cdot 4sin(x)$$

$$f'(x) = -3sin(x) \cdot 4sin(x) + 3cos(x) \cdot 4cos(x) = -12sin(x)^2 + 12cos(x)^2$$

Quotientenregel

In Baden-Württemberg ist diese nicht mehr Teil des Lehrplans. Diese wendest du an, wenn du einen Bruch hast, in dem ein x im Nenner und im Zähler auftaucht.
Du kannst entweder die Quotientenregel trotzdem lernen oder du schreibst es dir in ein Produkt um und leitest es nach der Produktregel ab.

Allgemein

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

- erstes Element ableiten und zweites stehen lassen
- minus schreiben
- erstes Element stehen lassen und zweites ableiten
- durch/Bruchstrich Nenner im Quadrat/hoch 2
- ableiten nach der Potenz- und Faktorregel